Satz 11.23: *Sei V ein vom Nullraum verschiedener endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper K.*

(i) *Ist $f \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$ nilpotent, dann gibt es eine geordnete Basis von V bzgl. welcher die Darstellungsmatrix von f eine Jordan-Blockmatrix zum Eigenwert 0 ist;*

(ii) *ist $f \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$ so, dass alle Eigenwerte von f in K sind (also $c_f(x) = (x-\lambda_1)^{d_1} \cdots (x-\lambda_k)^{d_k}$ für $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$), dann gibt es eine geordnete Basis von V bzgl. welcher die Darstellungsmatrix von f eine Blockdiagonalmatrix*

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}$$

ist, in welcher jedes J_i eine Jordan-Blockmatrix zum Eigenwert λ_i ist.

Beweis:
ad (i): Sei p der Index der nilpotenten Abbildung f. Wir betrachten die Kette von Teilräumen (wie in Lemma 11.20)

$$\{0\} = W_0 \subset \mathrm{kern} f = W_1 \subset \mathrm{kern} f^2 = W_2 \subset \cdots \subset \mathrm{kern} f^{p-1} = W_{p-1} \subset \mathrm{kern} f^p = W_p = V\ .$$

Nun wählen wir für diese Teilräume W_i Basen B_i wie folgt:

$$\begin{array}{ll} B_1 \ (= C_1) & \\ B_2 = B_1 \cup C_2, & \text{wobei } C_2 \subseteq W_2 \setminus W_1 \\ B_3 = B_2 \cup C_3, & \text{wobei } C_3 \subseteq W_3 \setminus W_2 \\ \vdots & \\ B_p = B_{p-1} \cup C_p, & \text{wobei } C_p \subseteq W_p \setminus W_{p-1} \end{array}$$

Dann ist

$$B_p = B_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_p$$

eine Basis von $V = W_p$.
Nun werden wir die Kette in umgekehrter Reihenfolge abarbeiten, von p zu 1, und dabei die C_i durch neue Basiselemente ersetzen. Die Menge

$$C_p^* := C_p = \{x_1, \ldots, x_\alpha\}$$

lassen wir unverändert.
Wegen Lemma 11.20 ist die Menge $\{f(x_1), \ldots, f(x_\alpha)\}$ linear unabhängig in W_{p-1}. Die Elemente $f(x_i)$ sind nicht in W_{p-2}, denn sonst wäre x_i in W_{p-1}. Die Menge

$$B_{p-2} \cup \{f(x_1), \ldots, f(x_\alpha)\}$$

ist linear unabhängig in W_{p-1}, denn aus

$$\sum \lambda_i z_i + \sum \mu_j f(x_j) = 0 \qquad (B_{p-2} = \{z_1, \ldots, z_r\})$$

würde folgen

$$f^{p-2}(\sum \lambda_i z_i) + f^{p-1}(\sum \mu_j x_j) = 0$$

und da der erste Summand 0 ist, hätten wir $\sum \mu_j x_j \in W_{p-1}$, im Widerspruch zur Wahl von C_p.
Also kann $B_{p-2} \cup \{f(x_1), \dots, f(x_\alpha)\}$ etwa wie folgt mit Vektoren $y_i \in W_{p-1} \setminus W_{p-2}$ zu einer Basis von W_{p-1} erweitert werden:

$$B_{p-2} \cup \underbrace{\{f(x_1), \dots, f(x_\alpha)\} \cup \{y_1, \dots, y_\beta\}}_{C^*_{p-1}} \ .$$

Dieses Vorgehen wiederholen wir nun mit C^*_{p-1} anstatt C_p. Wir erhalten eine Basis von W_{p-2} der Form

$$B_{p-3} \cup \underbrace{\{f^2(x_1), \dots, f^2(x_\alpha)\} \cup \{f(y_1), \dots, f(y_\beta)\} \cup \{z_1, \dots, z_\gamma\}}_{C^*_{p-2}} \ ,$$

wobei $z_i \in W_{p-2} \setminus W_{p-3}$.
So verfahren wir sukzessive mit allen Basen, und erhalten schliesslich ($\emptyset$ ist Basis für $W_0 = \{0\}$):

$$\begin{array}{lccccccccc}
C_p = C^*_p & : & x_1, & \dots, & x_\alpha, & & & & & \\
C^*_{p-1} & : & f(x_1), & \dots, & f(x_\alpha), & y_1, & \dots, & y_\beta & & \\
C^*_{p-2} & : & f^2(x_1), & \dots, & f^2(x_\alpha), & f(y_1), & \dots, & f(y_\beta), & z_1, \dots, z_\gamma & \\
 & \vdots & & & & & & & & \\
C^*_1 & : & f^{p-1}(x_1), & \dots, & f^{p-1}(x_\alpha), & f^{p-2}(y_1), & \dots, & f^{p-2}(y_\beta), & \dots\dots, & q_1, \dots, q_\omega \ .
\end{array}$$

Die Vektoren in der letzten Zeile bilden also eine Basis für W_1, die in den letzten beiden Zeilen bilden eine Basis für W_2, und so weiter. Alle zusammen bilden eine Basis für $W_p = V$.
Die Vektoren in der letzten Zeile werden durch f auf 0 abgebildet, und jeder Vektor in einer oberen Zeile wird abgebildet auf den Vektor darunter.
Wir erzeugen daraus nun eine geordnete Basis wie folgt: Elemente der ersten Spalte von unten her, dann Elemente der zweiten Spalte von unten her, etc. die Darstellungsmatrix von f bzgl. dieser geordneten Basis ist eine Jordan-Blockmatrix zum Eigenwert 0, wie man leicht sieht.

ad (ii): Mit der üblichen Notation gibt es eine Basis von

$$V_i = \text{kern}(f - \lambda_i \text{id})^{e_i},$$

bzgl. welcher die Darstellungsmatrix von $f_i - \lambda_i\text{id}$ eine Jordan-Blockmatrix zum Eigenwert 0 ist (der einzige Eigenwert einer nilpotenten Abbildung ist 0). Somit ist die Darstellungsmatrix J_i von f_i eine Jordan-Blockmatrix zum Eigenwert λ_i. $\square$