Wir zeigen nun noch, wie man mittels Eigenwerten und -vektoren auf der Einheitskugel in $\mathbb{R}_n$ das Maximum einer quadratischen Form bestimmen kann. Die Einheitskugel in $\mathbb{R}_n$ besteht aus allen Vektoren mit (Euklidscher) Norm 1:

$$S_n \;:=\; \{x \in \mathbb{R}_n \mid \; \| x \| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = 1\}.$$

Die Einheitskugel S_n ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Eine stetige Funktion besitzt also auf S_n ein Maximum.

Satz 10.38: *Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, sei $q(x) = x^T Ax$ die zugehörige quadratische Form auf $\mathbb{R}_n$ (Spaltenvektoren). Sei $s \in S_n$ so, dass $q(s)$ das Maximum von q auf S_n ist, also*

$$q(s) = \max\{q(t) \mid t \in S_n\} \; .$$

Dann ist s ein Eigenvektor von A; d.h. es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $As = \lambda s$.

Figure 1: Kurve $C(t) = (\cos t)s + (\sin t)w$

Beweis: Sei also $s \in S_n$ so, dass $q(s)$ das Maximum von q auf S_n ist. Sei $W = \{s\}^{\perp}$, also der Orthogonalraum zu s. Die Dimension von W ist $n-1$. Sei $w \in W$ mit $\| w \|= 1$. Wir betrachten die Kurve

$$C(t) = (\cos t)s + (\sin t)w.$$

Die Tangenten an die Einheitskugel S_n bei s sind die Einheitsvektoren $w \in W$. Die Kurve $C(t)$ liegt auf der Einheitskugel, denn $\| C(t) \|= 1$:

$$\begin{aligned}
\| C(t) \| &= \sqrt{\langle C(t) | C(t) \rangle} \\
&= \sqrt{\langle (\cos t)s + (\sin t)w | (\cos t)s + (\sin t)w \rangle} \\
&= \sqrt{\cos^2 t \langle s|s \rangle + (\cos t)(\sin t)\langle s|w \rangle + (\sin t)(\cos t)\langle w|s \rangle + \sin^2 t \langle w|w \rangle} \\
&= \sqrt{\cos^2 t \langle s|s \rangle + \sin^2 t \langle w|w \rangle} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ausserdem ist $C(0) = s$, die Kurve $C(t)$ geht also durch den Punkt s. Die Ableitung von $C(t)$ ist

$$C'(t) = (-\sin t)s + (\cos t)w,$$

also $C'(0) = w$. Am Punkt s geht die Kurve also in Richtung w. Nun betrachten wir die Funktion

$$g(t) = q(C(t)) = C(t)^T \cdot A \cdot C(t).$$

Die Ableitung von g ist wegen der Symmetrie von A

$$g'(t) = C'(t)^T \cdot A \cdot C(t) + C(t)^T \cdot A \cdot C'(t) = 2\, C'(t)^T \cdot A \cdot C(t).$$

Ausserdem

$$g'(t) = q'(C(t)) \cdot C'(t).$$

Da $q(s)$ ein Maximum ist, und $g(0) = q(s)$, haben wir $g'(0) = q'(s) \cdot C'(0) = 0$.
Daraus erhalten wir

$$0 = g'(0) = 2\,C'(0)^T \cdot A \cdot C(0) = 2\,w^T As.$$

Also ist As orthogonal zu allen $w \in W$. Nun ist aber $W^\perp = \operatorname{span}\{s\}$. Es gibt also ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $As = \lambda s$. $\square$

Korollar: *Das Maximum von q auf der Einheitskugel S_n ist der grösste Eigenwert von A.*

Beweis: Für jeden Eigenwert λ und jeden zugehörigen Eigenvektor s auf der Einheitskugel ($\| s \| = 1$) gilt

$$q(s) = s^T A s = s^T \lambda s = \lambda s^T s = \lambda.$$

Der Wert von q bei einem Eigenvektor auf der Einheitskugel ist also genau der zugehörige Eigenwert.
Satz 10.38 besagt, dass das Maximum von q auf der Einheitskugel bei einem Eigenvektor angenommen wird. Daher ist das Maximum von q auf der Einheitskugel gleich dem grössten Eigenwert. $\square$

Beispiel 10.39: Wir betrachten die quadratische Form $q(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2$ auf $\mathbb{R}_2$. Die Darstellungmatrix von q ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} .$$

Wir suchen das Maximum von q auf dem Einheitskreis S_2.
Das charakteristische Polynom von A ist $x^2 - 3x - 1/4$, die Eigenwerte sind also

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{10}}{2} .$$

Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$v(\lambda_i) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3}(2 - \lambda_i) \end{pmatrix} .$$

Die Eigenvektoren auf dem Einheitskreis sind

$$s(\lambda_i) = \frac{v(\lambda_i)}{\| v(\lambda_i) \|} .$$

Das Maximum von q auf dem Einheitskreis ist der grösste Eigenwert, also

$$\max\{q(t) \mid t \in S_2\} = \frac{3 + \sqrt{10}}{2} = \lambda_1 ,$$

und dieses Maximum wird angenommen am Punkt $s(\lambda_1)$.
Ebenso wird das Minimum $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{10}}{2}$ angenommen am Punkt $s(\lambda_2)$. □