1. (a) *(12 Punkte)* Berechnen Sie eine Orthonormalbasis für den Vektorraum der durch die Spalten von A aufgespannt wird.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösung: A hat Rang $3 \Rightarrow \{e_1, e_2, e_3\}$ ist ONB des Spaltenraums.

(b) *(8 Punkte)* Es sei $((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T, (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T)$ eine Orthonormalbasis eines Vektorraums W. Finden Sie jenen Punkt in W, der dem Punkt $v = (9, -2, 2)^T$ am nähesten liegt.

Lösung:

$$v_W = \sum_{i=1}^{2} \langle v | b_i \rangle b_i = \cdots = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. *(20 Punkte)* Eine quadratische Form sei gegeben durch die Darstellungsmatrix A. Berechnen Sie Rang, Index und Signatur der quadratischen Form. Bestimmen Sie weiters die Definitheit der Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - 9z^2 + 4xy + 6xz = x^2 + (x + 2y)^2 - (x - 3z)^2$$

Sylvestermatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\text{rk}(q) = 3$, $\text{index}(q) = 2$, $\text{sig}(q) = 1$. Indefinit.

Explizit: $q(0, 0, 1) = -9$ und $q(1, 1, 0) = 9$.

3. Sei V ein beliebiger Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein inneres Produkt auf V. Zeigen oder widerlegen Sie

(a) *(14 Punkte)* $\forall v, w \in V : |\langle v, w \rangle| \leq \frac{1}{2}(\|v\|^2 + \|w\|^2)$
Lösung: Ungleichung ist äquivalent zu

$$-(||v||^2 + ||w||^2) \leq 2\langle v, w \rangle \leq ||v||^2 + ||w||^2$$

Linke Ungleichng äquivalent zu $0 \leq \langle v+w, v+w \rangle$, rechte Ungleichung äquivalent zu $0 \leq \langle v - w, v - w \rangle$.

(b) *(6 Punkte)* $\forall v, w \in V : \|v - w\| \leq \|v\| - \|w\|$
Lösung: Unsinn: Rechte Seite kann negativ werden.

4. Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) *(10 Punkte)* Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) *(10 Punkte)* Die geometrische Vielfachheit des kleineren Eigenwerts ist 1, die des größeren ist gleich 2. Verwenden Sie diese Information, um eine Jordan-Normalform von A herzustellen.

Lösung:

$$\begin{aligned} \det(xI - A) &= (x-2) \cdot \begin{vmatrix} x+1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x-2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = \\ &= (x-2)(x+1) \cdot \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & -1 \\ 3 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x+1)^2(x-2)^3 \end{aligned}$$

Jordan-Form von A:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. *(20 Punkte)* Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt $A^2 \neq 0$ und $A^3 = 0$. Verwenden Sie diese Information um eine Jordan-Basis zu A zu berechnen.

Lösung:

A zeilenreduzieren zu

$$QA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Q \in \mathrm{GL}_5(K)$.

$$\ker(QA) = \ker A = \{x \in K^5 \mid x_1 = x_3 \wedge x_2 = 0\}$$

Sei $v := (1,0,1,0,0)^T$. Dann ist $B_1 = \{v, e_4, e_5\}$ eine Basis von $\ker A$.

$$Q \cdot A^2 = QA \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

QA^2 zeilenreduzieren zu

$$Q'A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\ker(A^2) = \ker(Q'A^2) = \{x \in K^5 \mid x_1 = x_3\}$ mit Basis $B_2 = \{v, e_4, e_5, e_2\}$.

Augenscheinlich gilt $e_1 \notin \ker(A^2)$. Somit ist $B_3 = \{v, e_4, e_5, e_2, e_1\}$ eine Basis von K^5. Weiters gilt $B_1 \subset B_2 \subset B_3$.

$$e_1 \xrightarrow{A} Ae_1 \xrightarrow{A} A^2e_1 \text{ und } Ae_1 \in \ker(A^2) \text{ und } A^2e_1 \in \ker A$$

A^2e_1 ergänzen zu Basis von $\ker A$: $\{A^2e_1, e_4, e_5\}$. Eine Jordan-Basis von A ist somit

$$P = (A^2e_1, Ae_1, e_1, e_4, e_5) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$