`Name: ....................................`

`Matr.Nr.: ..................................`

`Stud.Kennz.: ..............................`

Klausur
"Lineare Algebra II für Physiker(innen)" (326038)
25.4.2015

Bitte folgendes beachten:

- *Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.*
- *Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.*
- *Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.*
- *Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.*

Alle Antworten sind zu begründen; ein simples "ja/nein" reicht nicht.

(1) Sei A eine reelle 3×3 Matrix, und f die folgende lineare Abbildung vom Spaltenraum $\mathbb{R}_3$ nach $\mathbb{R}_3$:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_3 \\ x & \mapsto & A \cdot x \end{array}.$$

Gibt es für die Matrizen in (a) und (b) eine geordnete Basis B von $\mathbb{R}_3$ bzgl. derer die Darstellungsmatrix von f eine Diagonalmatrix ist? Wenn ja, wie sieht so eine Basis aus?

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **(b)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

[Hinweis: die Eigenwerte von A sind kleine natürliche Zahlen.]

(2) Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{R}$. Seien λ_1 und λ_2 zwei verschiedene reelle Eigenwerte von A. Sei $v_1 \in \mathbb{R}_n$ Eigenvektor zu λ_1, und sei $v_2 \in \mathbb{R}_n$ Eigenvektor zu λ_2.
Zeigen Sie: *Die Menge* $\{v_1, v_2\}$ *ist linear unabhängig in* $\mathbb{R}_n$.

(3) **(a)** Sei $\langle . | . \rangle$ die folgende Abbildung von $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$:

$$\langle u|v \rangle = \langle (u_1, u_2, u_3)|(v_1, v_2, v_3) \rangle = u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1 \ .$$

Ist $\langle . | . \rangle$ ein inneres Produkt?

(b) Sei $\langle . | . \rangle$ die folgende Abbildung von $C([0,1], \mathbb{R})^2$ (dem Raum der stetigen Funktionen von $[0,1]$ in $\mathbb{R}$) in den Grundkörper $\mathbb{R}$:

$$\langle f|g \rangle = f(0) \cdot g(0) + f(1) \cdot g(1) \ .$$

Ist $\langle . | . \rangle$ ein inneres Produkt?

(4) Sei $V = C([0,1], \mathbb{R})$ der reelle Vektorraum der stetigen Funktionen von $[0,1]$ in $\mathbb{R}$. Auf $V \times V$ betrachten wir das innere Produkt

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 f g \, dx.$$

(a) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis für den Teilraum $W = \operatorname{span}(1, x, x^2)$.
(b) Bestimmen Sie die beste Approximation (Fourier-Approximation) zu x^4 in W, also dasjenige $w \in W$ für welches gilt:

$$\forall w' \in W : \| \, x^4 - w \, \| \leq \| \, x^4 - w' \, \| \ .$$

(5) **(a)** Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ist darstellbar als direkte Summe $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$, wobei

$$U = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \quad , \quad V = \operatorname{span}(\{(1,1,1)\}) \ .$$

Sei $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Projektion auf U parallel zu V.
Bestimmen Sie $p((1,2,3))$.

(b) Sei W (wie in Bsp. (4)) der von $\{1, x, x^2\}$ aufgespannte Teilraum von $C([0,1], \mathbb{R})$. W lässt sich darstellen als direkte Summe $W = U \oplus V$, wobei

$$U = \operatorname{span}(1, x^2) \quad , \quad V = \operatorname{span}(x+1) \ .$$

Sei $p : W \to W$ die Projektion auf U parallel zu V.
Bestimmen Sie $p(x^2 + 2x + 3)$.