Name: .....................................

Matr.Nr.: ..................................

Stud.Kennz.: ..............................

**Klausur**
**"Lineare Algebra und Analytische Geometrie II"** (326040)
27.6.2015

---

*Bitte folgendes beachten:*

- *Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.*
- *Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.*
- *Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.*
- *Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.*

---

**Alle Antworten sind zu begründen; ein simples "ja/nein" reicht nicht.**

(1) Sei $A$ eine $n \times n$ Matrix über dem Körper $K$. Beschreiben Sie:
   (a) Was ist ein Eigenwert bzw. ein Eigenvektor von $A$?
   (b) Was ist die algebraische bzw. die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes von $A$?
   (c) Wie hängen $n$, die Anzahl der Eigenwerte, die algebraische und die geometrische Vielfachheit zusammen?

(2) Sei $A$ eine $n \times n$ Matrix über dem Körper $K$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ verschiedene Eigenwerte von $A$, und sei jeweils $x_i$ ein Eigenvektor zu $\lambda_i$, $1 \leq i \leq k$.
Beweisen Sie: *Die Vektoren $x_1, \ldots, x_k$ sind linear unabhängig.*

(3) Bestimmen Sie eine maximale Menge linear unabhängiger Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[Hinweis: 1 ist ein Eigenwert von $A$.]

(4) Zum Minimalpolynom einer Matrix.
   (a) Was versteht man unter dem Minimalpolynom einer quadratischen Matrix $A$ über dem Körper $K$?
   (b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

[Hinweis: 1 ist ein Eigenwert von $A$.]

(5) Sei $V$ der IP-Raum $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$, also der Polynome vom Grad höchstens 3 mit reellen Koeffizienten, und dem inneren Produkt

$$\langle p|q\rangle = \int_0^1 p \cdot q \quad .$$

   (a) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis $B = (b_1, b_2)$ des Teilraums $W$, welcher von den beiden Polynomen

$$p_1 = x + 1, \quad p_2 = x^2 + x + 1$$

aufgespannt wird.
   (b) Bestimmen Sie die beste Approximation $\overline{q}$ in $W$ zu $q = x^3$.

(6) Welche Normalformen von Matrizen kennen Sie, und wie hängen diese zusammen?