10 Bilinearformen und quadratische Formen

Definition 10.1: *Seien $V_1, \dots, V_r$ Vektorräume über dem Körper K. Eine Abbildung $f : V_1 \times \cdots \times V_r \to K$ heisst* **multilinear** *oder eine* **Multilinearform** *auf $V_1 \times \cdots \times V_r$, falls für alle $1 \leq i \leq r$, alle $v_i, v_i' \in V_i$ und alle $\lambda_i, \lambda_i' \in K$ gilt:*

$$f(v_1, \dots, \lambda_i v_i + \lambda_i' v_i', \dots, v_r) = \lambda_i f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r) + \lambda_i' f(v_1, \dots, v_i', \dots, v_r).$$

Mit $\mathrm{Mult}_K(V_1, \dots, V_r)$ bezeichnen wir die Menge aller Multilinearformen von $V_1 \times \cdots \times V_r$ nach K.
Ist $r = 2$, so sagt man statt multilinear auch **bilinear** *und statt Multilinearform auch* **Bilinearform**. *Mit $\mathrm{Bil}_K(V_1, V_2)$ bezeichen wir die Menge aller Bilinearformen von $V_1 \times V_2$ nach K.* □

Beispiel 10.2: (i) Das kanonische innere Produkt auf $\mathbb{R}^n$, also

$$f\big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \;,$$

ist eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
(ii) Die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \big((x_1, x_2), (y_1, y_2, y_3)^T\big) & \mapsto & (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

ist eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$.
(iii) Allgemein ist für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$ die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} f: & K^m \times K_n & \longrightarrow & K \\ & \big((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_n)^T\big) & \mapsto & (x_1, \dots, x_m) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{array}$$

eine Bilinearform auf $K^m \times K_n$.
(iv) Die Determinantenabbildung

$$\begin{array}{cccc} \det: & (K_n)^n & \longrightarrow & K \\ & (a_1, \dots, a_n) & \mapsto & \det(a_1, \dots, a_n) \end{array}$$

ist eine Multilinearform auf $(K_n)^n$, also $\det \in \mathrm{Mult}_K(K_n, \dots, K_n)$. □

Beispiel 10.3: Sei $V = C(\mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen reellen Funktionen, sei $f(x, y)$ eine fixe stetige reelle Funktion in 2 Variablen, und seien $a, b \in \mathbb{R}$. Aus den Eigenschaften des (Riemann-) Integrals sieht man, dass die Abbildung $F : V \times V \to \mathbb{R}$ mit

$$F(g, h) \;=\; \int_a^b \int_a^b g(x) f(x, y) h(y) \, dx \, dy$$

eine Bilinearform ist. $\square$

Beispiel 10.4: Eine Mulilinearform oder Bilinearform ist i.a. **nicht** linear. So ist etwa das Skalarprodukt (Bsp. 10.2(i)) nicht linear auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
Umgekehrt ist i.a. eine lineare Abbildung nicht multilinear, wie man etwa an $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x + 3y$, sieht:

$$f(1 + 1, 1) = 7 \neq 10 = f(1, 1) + f(1, 1). \qquad \square$$

Satz 10.5: *Ist $f \in \mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_r)$ und enthält $v \in V_1 \times \cdots \times V_r$ eine Nullkomponente, dann ist $f(v) = 0$.*

Satz 10.6: *Seien $V_1, \ldots, V_r$ Vektorräume über dem Körper K. Dann ist $\mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_r)$ ein Vektorraum über K.*

Satz 10.7: *Seien $f \in \mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_r)$ und $g \in \mathrm{Mult}_K(W_1, \ldots, W_s)$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{cccc} f \otimes g : & \times_{i=1}^r V_i \ \times \ \times_{j=1}^s W_j & \longrightarrow & K \\ & (x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s) & \mapsto & f(x_1, \ldots, x_r) \cdot g(y_1, \ldots, y_s) \end{array}$$

ebenfalls multilinear, also $f \in \mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_r, W_1, \ldots, W_s)$.

Definition 10.8: *Seien $f \in \mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_r)$ und $g \in \mathrm{Mult}_K(W_1, \ldots, W_s)$. Das in Satz 10.7 definierte Produkt $f \otimes g$ heisst das* **Tensorprodukt** *der Multilinearformen f und g.*
$\square$

Beispiel 10.9: Für $1 \leq i \leq p$ ist die Projektion $\mathrm{pr}_i^{(p)} : K^p \to K$ linear, also $\mathrm{pr}_i^{(p)} \in \mathrm{Mult}_K(K^p)$. Seien $\mathrm{pr}_i^{(m)} \in \mathrm{Mult}_K(K^m)$ bzw. $\mathrm{pr}_j^{(n)} \in \mathrm{Mult}_K(K^n)$ die i-te bzw. j-te Projektion. Dann ist

$$\begin{array}{cccl} \mathrm{pr}_i^{(m)} \otimes \mathrm{pr}_j^{(n)} : & K^{m+n} & \longrightarrow & K \\ & (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) & \mapsto & x_i y_j \ = (x_1, \ldots, x_m) E_{ij} (y_1, \ldots, y_n)^T \ , \end{array}$$

das Tensorprodukt dieser Projektionen, $\mathrm{pr}_i^{(m)} \otimes \mathrm{pr}_j^{(n)} \in \mathrm{Mult}_K(K, \ldots, K)$. $\square$

Das Tensorprodukt kann auf offensichtliche Weise ausgedehnt werden auf mehrere Abbildungen $f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_t$.

Satz 10.10: *Seien $V_1, \ldots, V_r$ endlichdimensionale Vektorräume über K. Seien $B_i = (b_1^{(i)}, \ldots, b_{n_i}^{(i)})$ geordnete Basen von V_i, und seien $B_i^* = (\beta_1^{(i)}, \ldots, \beta_{n_i}^{(i)})$ die dazu dualen (geordneten) Basen von V_i^* (vgl. 6.26ff). Dann ist*

$$B^* \ = \ \left(\beta_{j_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \beta_{j_r}^{(r)} \right)_{1 \leq j_i \leq n_i}$$

eine (geordnete) Basis von $\mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_r)$.

Korollar: *Sind $V_1, \ldots, V_r$ endlichdimensionale Vektorräume über K, dann gilt*

$$\dim(\mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_r)) \ = \ \dim(V_1) \cdots \dim(V_r).$$

Definition 10.11: *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K, sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine geordnete Basis von V, und sei $f : V \times V \to K$ eine Bilinearform auf $V \times V$. Dann ist die* **Darstellungsmatrix** *von f bzgl. der Basis B die Matrix*

$$A = (a_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n}, \quad \text{wobei} \quad a_{ij} = f(b_i, b_j). \qquad \square$$

Satz 10.12: *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über K und sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine geordnete Basis von V.*
(i) *Ist $A = (a_{ij})$ die Darstellungsmatrix der Bilinearform $f : V \times V \to K$ bzgl. der geordneten Basis B, dann gilt für beliebige $x = \sum_{i=1}^n x_i b_i$ und $y = \sum_{i=1}^n y_i b_i$:*

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j = (x_1, \dots, x_n) \cdot A \cdot (y_1, \dots, y_n)^T.$$

(ii) *Umgekehrt erzeugt jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(K)$ eine Bilinearform auf $V \times V$ mittels*

$$f(x_1 b_1 + \dots + x_n b_n, y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n) = (x_1, \dots, x_n) \cdot A \cdot (y_1, \dots, y_n)^T.$$

(iii) *Die Zuordnung der Darstellungsmatrix zur Bilinearform f ist ein Isomorphismus zwischen $\mathrm{Bil}_K(V, V)$ und $\mathrm{Mat}_{n \times n}(K)$.*

Beispiel 10.13: (i) Die Darstellungsmatrix des Skalarprodukts in Beispiel 10.2(i) bzgl. der kanonischen Basis von K^n ist die Einheitsmatrix.
(ii) Wir betrachten die Bilinearform auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ mit $f(x, y) = x_1(y_2 + y_3) + x_2 y_3$. Bzgl. der kanonischen Basis hat f die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

erzeugt die Bilinearform

$$f(x, y) = (x_1, x_2, x_3) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 5x_1 y_3 - 2x_2 y_1 + x_2 y_3 - 6x_3 y_2 + 6x_3 y_3$$

auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. $\square$

Satz 10.14: *Sei V ein Vektorraum der Dimension n über K. Seien $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $C = (c_1, \dots, c_n)$ geordnete Basen von V, sei P die Basistransformationsmatrix von C nach B, und sei $f : V \times V \to K$ eine Bilinearform mit Darstellungsmatrix A bzgl. B. Dann ist die Darstellungsmatrix von f bzgl. C gegeben durch $P^T A P$.*

Beispiel 10.15: Auf $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die Bilinearform f gegeben durch

$$2x_1y_1 - 3x_2y_3 + x_3y_3.$$

Bzgl. der kanonischen Basis hat f die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um die Darstellungsmatrix von f bzgl. der geordneten Basis

$$C = (\,(1,1,1), (-2,1,1), (2,1,0)\,)$$

zu bestimmen, verwenden wir die Transformationsmatrix von C in die Standardbasis:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Darstellungmatrix bzgl. C ist dann

$$P^T AP \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -6 & 4 \\ -6 & 6 & -8 \\ 1 & -11 & 8 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

In Definition 3.3 haben wir eine (nicht notwendig quadratische) Matrix B zeilenäquivalent zur (nicht notwendig quadratischen) Matrix A genannt, wenn $B = P \cdot A$ für eine reguläre Matrix P. Ebenso haben wir eine Matrix B spaltenäquivalent zu A genannt, wenn $B = A \cdot Q$ für eine reguläre Matrix Q. Daraus ergibt sich auf natürliche Weise der Begriff der "Äquivalenz": A und B heissen **äquivalent**, geschrieben $A \sim B$, g.d.w.

$$B \;=\; P \cdot A \cdot Q$$

für reguläre Matrizen P und Q. Die Äquivalenz $\sim$ ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation.

Der Satz 10.14 begründet die folgende Definition von "Kongruenz".

Definition 10.16: *Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. A und B heissen* **kongruent**, *geschrieben $A \simeq B$, gdw. es eine reguläre Matrix P gibt, sodass $B = P^T AP$.* $\square$

Satz 10.17: *Die Relation "$\simeq$" (Kongruenz) ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$, welche feiner ist als die Relation "$\sim$" (Äquivalenz) auf $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$.*

Definition 10.18: *Eine Bilinearform $f : V \times V \to K$ heisst* **symmetrisch** *gdw. $f(x,y) = f(y,x)$ für alle $x, y \in V$ gilt.*
f heisst **schief-symmetrisch** *gdw. $f(x,y) = -f(y,x)$ für alle $x, y \in V$ gilt.* $\square$

Satz 10.19: *Jede Bilinearform $f : V \times V \to K$ kann auf eindeutige Weise zerlegt werden in die Summe $f = g + h$ einer symmetrischen Bilinearform g und einer schief-symmetrischen Bilinearform h. (Dabei müssen wir annehmen, dass $1/2$ in K existiert, also $1 + 1 \neq 0$)*

Ist V endlichdimensional, dann ergibt sich Satz 10.19 aus dem Satz 2.1.25 über die Zerlegung einer quadratischen Matrix in die Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix.

Beispiel 10.20: Die Bilinearform

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$$

auf $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ lässt sich schreiben als $f = g + h$, wobei g die symmetrische Bilinearform

$$\begin{array}{rcl} g((x_1,x_2),(y_1,y_2)) &=& \frac{1}{2}\big(f((x_1,x_2),(y_1,y_2) + f((y_1,y_2),(x_1,x_2))\big) \\ &=& \frac{1}{2}\big(x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2y_1x_1 + y_1x_2 + 2y_2x_1 + y_2x_2\big) \\ &=& \frac{1}{2}\big(2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2\big) \end{array}$$

ist, und h die schief-symmetrische Bilinearform

$$\begin{array}{rcl} h((x_1,x_2),(y_1,y_2)) &=& \frac{1}{2}\big(f((x_1,x_2),(y_1,y_2) - f((y_1,y_2),(x_1,x_2))\big) \\ &=& \frac{1}{2}\big(x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2 - y_1x_1 - y_1x_2 - 2y_2x_1 - y_2x_2\big) \\ &=& \frac{1}{2}\big(-x_1y_2 + x_2y_1\big) \end{array}$$

ist. □

Lemma 10.21: *Die Darstellungsmatrix einer symmetrischen Bilinearform ist symmetrisch, und umgekehrt erzeugt eine symmetrische Matrix eine symmetrische Bilinearform.*

Definition 10.22: *Sei V ein Vektorraum über K, und sei $f : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rccc} q: & V & \longrightarrow & K \\ & x & \mapsto & f(x,x) \end{array}$$

eine **quadratische Form** *auf V. Diese Abbildung q heisst auch* **die zu f gehörige quadratische Form**, *geschrieben q_f.* □

Beispiel 10.23: Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} q: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x^2 - xy + y^2 \end{array}$$

ist eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^2$. Das sieht man auch aus der Darstellung

$$q(x,y) = (x,y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Die Darstellungsmatrix bzgl. der kanonischen Basis ist also symmetrisch. □

Satz 10.24: *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und sei $f : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform auf V (wie in Satz 10.19 nehmen wir an, dass $1/2$ in K existiert, also $1 + 1 \neq 0$). Dann gilt folgendes:*

(i) $q_f(\lambda x) = \lambda^2 q_f(x)$;

(ii) $f(x,y) = \frac{1}{2}\big(q_f(x+y) - q_f(x) - q_f(y)\big)$;

(iii) $f(x,y) = \frac{1}{4}\big(q_f(x+y) - q_f(x-y)\big)$.

Satz 10.25: *Jede reelle quadratische Form $q : V \to \mathbb{R}$ (V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$) gehört zu einer eindeutig bestimmten symmetrischen Bilinearform.*

Dieser Satz gibt uns die Berechtigung für die folgende Definition.

Definition 10.26: *Sei $q : V \to \mathbb{R}$ eine reelle quadratische Form auf dem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V. Die* **Darstellungsmatrix** *von q ist die Darstellungsmatrix der zugehörigen symmetrischen Bilinearform.* □

Beispiel 10.27: Die Abbildung $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$q(x,y) \;=\; 4x^2 + 6xy + 9y^2 \;=\; (x,y) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ist eine quadratische Form. Die Darstellungsmatrix von q ist

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

und die zugehörige Bilinearform ist

$$f\big((x,y),(x',y')\big) \;=\; 4xx' + 3(xy' + x'y) + 9yy'.$$ □

Wegen Satz 10.14 repräsentieren symmetrische Matrizen A und B dieselbe quadratische Form bzgl. verschiedener Basen genau dann, wenn sie kongruent sind. Im folgenden wollen wir nun eine besonders günstige Darstellung einer quadratischen Form unter Kongruenztransformationen finden.

Natürlich haben kongruente Matrizen denselben Rang, da durch Multiplikation mit einer regulären Matrix (welche ja ein Produkt von Elementarmatrizen ist) der Rang nicht verändert wird.

Satz 10.28: *Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, und A symmetrisch. Dann ist A kongruent zu einer eindeutig bestimmten Matrix der Form*

$$\tilde{A} \;=\; \begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix} .$$

Aus Satz 10.28 ergibt sich unmittelbar der folgende Satz von Sylvester [1].

Satz 10.29: (Sylvester) *Sei V ein Vektorraum der Dimension n über $\mathbb{R}$ und sei $q : V \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form auf V. Dann gibt es eine geordnete Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von V, und natürliche Zahlen r, s mit $0 \le r + s \le n$, sodass für jedes $x = \sum_{i=1}^n x_i b_i$ gilt*

$$q(x) \;=\; x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_{r+s}^2.$$

Diese Zahlen r und s hängen nicht von einer solchen Basis ab.

[1] James Joseph Sylvester, 1814–1897

Definition 10.30: *Sei q eine reelle quadratische Form über dem endlichdimensionalen Vektorraum V, wie in Satz 10.29. Dann heisst die Darstellung von q wie in Satz 10.29 (bzgl. einer geeigneten Basis) die* **kanonische Form** *von q. Weiters heisst $r+s$ der* **Rang** *der quadratischen Form q, r heisst der* **Index** *von q und $r-s$ heisst die* **Signatur** *von q.* □

Beispiel 10.31: Wir betrachten die quadratische Form

$$\begin{array}{rlcl} q: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & x^2-2xy+4yz-2y^2+4z^2 \ . \end{array}$$

Die Darstellungsmatrix von q (bzgl. der kanonischen Basis) ist die symmetrische Matrix

$$A \ = \ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \ .$$

Um die kanonische Form von q zu bestimmen, könnte man wie in Satz 10.28 eine geeignete Basis bestimmen. Man kann aber auch die Methode der "Vervollständigung der Quadrate" anwenden, wie wir an diesem Beispiel demonstrieren:

$$q(x,y,z) = (x-y)^2+4yz-3y^2+4z^2 = (x-y)^2+(y+2z)^2-4y^2.$$

Also für

$$\alpha = x-y, \quad \beta = y+2z, \quad \gamma = 2y \qquad (1)$$

bzw.

$$x = \alpha + \frac{1}{2}\gamma, \quad y = \frac{1}{2}\gamma, \quad z = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\gamma \qquad (2)$$

lässt sich q schreiben als

$$q(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha^2+\beta^2-\gamma^2.$$

Aus (1) lesen wir die Transformationsmatrix P ab:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ = \ P \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \ .$$

Bzgl. der Basis

$$\big((1,-1,0),(0,1,2),(0,2,0)\big)$$

hat die quadratische Form q die Darstellung

$$\tilde{A} \ = \ P^T \cdot A \cdot P \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Die kanonische Form von q ist also

$$q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2+x_2^2-x_3^2,$$

der Rang von q ist 3, der Index ist 2 und die Signatur ist 1. □

Definition 10.32: *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $q : V \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form auf V.*

(i) *q heisst* **positiv definit** *gdw.* $\forall x \in V \setminus \{0\} : q(x) > 0$;

(ii) *q heisst* **positiv semidefinit** *gdw.* $\forall x \in V \setminus \{0\} : q(x) \geq 0$;

(iii) *q heisst* **negativ definit** *gdw.* $\forall x \in V \setminus \{0\} : q(x) < 0$;

(iv) *q heisst* **negativ semidefinit** *gdw.* $\forall x \in V \setminus \{0\} : q(x) \leq 0$.

In allen anderen Fällen heisst q **indefinit**.
Ebenso nennt man eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ positiv defninit, positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit gdw.

$$\forall x \in V \setminus \{0\} : xAx^T >, \geq, <, \leq 0$$

gilt. □

Satz 10.33: *Sei $q : V \to \mathbb{R}$ eine reelle quadratische Form auf einem n-dimensionalen Vektorraum. Sei A die Darstellungmatrix von q. Sei $\tilde{A}$ die zu A kongruente Matrix von der Form wie in Satz 10.28, also mit r mal der 1 und s mal der -1 in der Diagonale. Dann ist q (bzw. A)*

(i) *positiv definit gdw. $r = n$ und $s = 0$;*

(ii) *positiv semidefinit gdw. $r \leq n$ und $s = 0$;*

(iii) *negativ definit gdw. $r = 0$ und $s = n$;*

(iv) *negativ semidefinit gdw. $r = 0$ und $s \leq n$.*

Ohne Beweis geben wir noch folgendes Kriterium für die Definitheit an.

Satz 10.35: *Sei q eine reelle quadratische Form auf dem n-dimensionalen Vektorraum V und $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ die zu q gehörige symmetrische Darstellungsmatrix. Dann ist q (bzw. A)*

(i) *positiv definit gdw. alle Hauptminoren von A positiv sind;*

(ii) *negativ definit gdw. die Hauptminoren von A abwechselnd negativ und positiv sind, also $M_1 < 0, M_2 > 0, M_3 < 0$, etc.*

Beispiel 10.36: Wir betrachten die quadratische Form aus Beispiel 10.31, also

$$\begin{array}{rlcl} q: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & x^2 - 2xy + 4yz - 2y^2 + 4z^2 \end{array},$$

mit der Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die kanonische Form von q ist

$$q(x,y,z) = (x-y)^2 + (y+2z)^2 - 4y^2,$$

und die zu A kongruente kanonische Matrix ist

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Die quadratische Form q ist also weder positv noch negativ definit. Insbesondere gilt

$$q(1,1,1) = 5, \quad q(1,3,1) = -7 .$$

Ändern wir nun die quadratische Form zu

$$p(x) := q(x) + 5y^2 = x^2 - 2xy + 4yz + 3y^2 + 4z^2 ,$$

so hat die neue quadratische Form p die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} .$$

Die Hauptminoren sind $M_1 = 1, M_2 = 2, M_3 = 4$, die quadratische Form p ist also positiv definit. □

Satz 10.37: *Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, und sei $z = x + iy \in \mathbb{C}_n$ $(x, y \in \mathbb{R}_n)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Dann ist λ reell, und sowohl x als auch y sind (falls verschieden vom Nullvektor) reelle Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ.*

Wir zeigen nun noch, wie man mittels Eigenwerten und -vektoren auf der Einheitskugel in $\mathbb{R}_n$ das Maximum einer quadratischen Form bestimmen kann. Die Einheitskugel in $\mathbb{R}_n$ besteht aus allen Vektoren mit (Euklidscher) Norm 1:

$$S_n := \{x \in \mathbb{R}_n \mid \; \| x \| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = 1\}.$$

Die Einheitskugel S_n ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Eine stetige Funktion besitzt also auf S_n ein Maximum.

Satz 10.38: *Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, sei $q(x) = x^T Ax$ die zugehörige quadratische Form auf $\mathbb{R}_n$ (Spaltenvektoren). Sei $s \in S_n$ so, dass $q(s)$ das Maximum von q auf S_n ist, also*

$$q(s) = \max\{q(t) \mid t \in S_n\} .$$

Dann ist s ein Eigenvektor von A; d.h. es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $As = \lambda s$.

Korollar: *Das Maximum von q auf der Einheitskugel S_n ist der grösste Eigenwert von A.*

Beispiel 10.39: Wir betrachten die quadratische Form $q(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2$ auf $\mathbb{R}_2$. Die Darstellungmatrix von q ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} .$$

Wir suchen das Maximum von q auf dem Einheitskreis S_2.
Das charakteristische Polynom von A ist $x^2 - 3x - 1/4$, die Eigenwerte sind also

$$\lambda_{1,2} \;=\; \frac{3 \pm \sqrt{10}}{2} \; .$$

Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$v(\lambda_i) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3}(2-\lambda_i) \end{pmatrix} \; .$$

Die Eigenvektoren auf dem Einheitskreis sind

$$s(\lambda_i) \;=\; \frac{v(\lambda_i)}{\| \, v(\lambda_i) \, \|} \; .$$

Das Maximum von q auf dem Einheitskreis ist der grösste Eigenwert, also

$$\max\{q(t) \mid t \in S_2\} \;=\; \frac{3 + \sqrt{10}}{2} \;=\; \lambda_1 \; ,$$

und dieses Maximum wird angenommen am Punkt $s(\lambda_1)$.
Ebenso wird das Minimum $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{10}}{2}$ angenommen am Punkt $s(\lambda_2)$. $\square$