6. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Linear Algebra 2 für PhysikerInnen
Sommersemester 2013

1. (a) Für beliebige Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ beweise: $v \times w = 0$ genau dann, wenn (v, w) linear abhängig. (b) Für $u = (2, 4, 0)^t, v = (-1, 3, 0)^t$ und $w = (1, 2, 2)^t$ berechne das Volumen des von u, v und w im $\mathbb{R}_3$ aufgespannten Parallelepipeds.

2. Seien v und w beliebige linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}_3$. Bilden die Vektoren $(v, w, v \times w)$ stets eine Basis des $\mathbb{R}_3$? (Beweis oder Gegenbeispiel.)

3. Projizieren Sie den Vektor $u = (1, 1)^t \in \mathbb{R}_2$ auf die zwei Geraden, welche jeweils durch $(0, 0)$ und durch die Punkte $(1, 0)$ bzw. $(1, 2)$ gehen. Zeichnen Sie die Projektionen $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_2$ und den Additionsvektor $p_1 + p_2$. Warum ergibt $p_1 + p_2$ nicht den Vektor u?

4. Sei $f : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ die Projektionsabbildung auf den Teilraum, der durch die Ebene $x - y - 2z = 0$ beschriebenen wird. Man berechne die Projektionsmatrix $P \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$. (D.h., $f = h_P$.)

5. (a) Man berechne eine Orthonormalbasis des Spaltenraums von A. (b) Man berechne die Projektion von b auf den Spaltenraum von A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4 \times 2, \mathbb{R}) \text{ und } \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6. Man orthonormalisiere mittels Gram-Schmidt-Verfahren die Spaltenvektoren der Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

7. Man berechne die QR-Faktorisierung der Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R}).$$