4. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Linear Algebra 2 für PhysikerInnen
Sommersemester 2013

1. Mittels des Algorithmus "Ax=b" bestimme man die Lösungsmenge L des Systems $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Mittels Rang-Analyse der darstellenden Matrizen entscheide man Injektivität, Surjektivität und Bijektivität der linearen Abbildungen:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2 - 2x_3, 3x_2 + 2x_3),$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (-x_1 + x_2, 2x_1 - 2x_2, x_1 + 2x_2).$$

3. Sei $A \in \mathrm{M}(3 \times 3; \mathbb{R})$, wobei die dritte Zeile die Summe der ersten beiden Zeilen ist. (a) Ist A invertierbar? (b) Kann es eine Lösung von $Ax = b$ für $b = (1\,2\,4)^t \in \mathbb{R}_3$ geben?

4. Gegeben seien die Punkte $p_1 = (0, 1, 2), p_2 = (3, 4, 1), p_3 = (6, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$. (a) Mittels Gauß-Elimination finde man $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$, nicht alle gleich 0, sodaß $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : c_1\, x + c_2\, y + c_3\, z + c_4 = 0\}$ eine Ebene durch die Punkte p_1, p_2, p_3 ist. (b) Wie in der Vorlesung löse man das Problem mittels Determinanten-Darstellung.

5. Man berechne die Determinanten der Matrizen A_i durch Reduktion auf obere Dreiecksgestalt (d.h.: unter der Diagonale stehen lauter Nullen):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

6. Durch die Punkte $(1, 3), (2, 5), (3, 10) \in \mathbb{R}^2$ soll eine Polynomfunktion p gelegt werden. Man bestimme p: (a) mittels der Newton'schen, (b) mittels der Lagrange'schen Interpolations-Formel.

7. Seien $A, B \in \mathrm{M}(n \times n; K)$. Beweise: die Produkt-Matrix $A\,B$ ist invertierbar genau dann, wenn A und B invertierbar sind.