10. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Sommersemester 2013

1. Eine Kaninchenpopulation $k = k(t)$ nimmt schnell zu (6 mal k), es gibt aber einen Verlust (-2 mal w) proportional zur Wolfspopulation $w = w(t)$:

$$\frac{dk}{dt} = 6k - 2w \quad \text{und} \quad \frac{dw}{dt} = 2k + w.$$

(a) Man bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren dieses Systems. (b) Welche Populationen erhält man in Abhängigkeit von der Zeit t für die Anfangswerte $k(0) = w(0) = 30$. (c) Ist das Verhältnis der Populationen von Kaninchen zu Wölfen nach einer langen Zeit 1 zu 2 oder 2 zu 1?

2. Zwischen zwei Räumen, welche $v(0) = 30$ und $w(0) = 10$ Personen enthalten, wird eine Tür geöffnet. Die Bewegung der Personen zwischen den Räumen sei durch folgendes DGL-System beschrieben:

$$\frac{dv}{dt} = w - v \quad \text{und} \quad \frac{dw}{dt} = v - w.$$

(a) Lösen Sie das System mittels Diagonalisierung. (b) Zeigen Sie, daß die Gesamtanzahl $v+w$ konstant bleibt. (c) Welche Werte für $v = v(t)$ und $w = w(t)$ ergeben sich mit $t = 1$?

3. Man transformiere die DGL $y''(t) = 0$ auf ein System $\frac{du}{dt} = Au$, $A \in \mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{C})$. Man löse das System und berechne die Matrix-Exponentialfunktion e^{At}.

4. Man berechne $e^A e^B$, $e^B e^A$ und e^{A+B}:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Sei $A \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{C})$. (a) Geben Sie die Inverse zur Matrix e^{At} an. (b) Was folgt aus der Eigenwert-Eigenvektor Beziehung $Ax = \lambda x$ für $e^{At}x$?

6. Seien $A, B \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{C})$ zwei ähnliche Matrizen mit $B = M^{-1}AM$ für $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Man zeige: $(v_1, \ldots, v_n)$ ist Basis von $\mathrm{NR}(A)$ genau dann, wenn $(M^{-1}v_1, \ldots, M^{-1}v_n)$ Basis von $\mathrm{NR}(B)$ ist.

7. Sei $N_m \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{C})$ diejenige Matrix mit Einsen auf der oberen Nebendiagonale und ansonsten mit allen Einträgen gleich 0. Man beweise:

$$(N_m)^m = 0 \;\; \text{(Null-Matrix)} \;\; .$$