

Übungsbeispiele
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
SS 2013

1. Handelt es sich bei

- (a) $(\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, +, \cdot)$ über \mathbb{Z}
- (b) $(\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, +, \cdot)$ über \mathbb{Q}
- (c) $(\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, +, \cdot)$ über \mathbb{R}

mit der Addition $(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2}) := (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2}$ und der Skalarmultiplikation durch $\lambda \cdot (a + b\sqrt{2}) := \lambda a + \lambda b\sqrt{2}$ um einen Vektorraum.

2. Sei V der Vektorraum $(\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, +, \cdot)$ über \mathbb{Q} . Handelt es sich bei

- (a) $\{b\sqrt{2} \mid b \in \mathbb{Q}\}$
- (b) $\{a + b\sqrt{2} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Q}\}$

um einen Unterraum von V ? Geben Sie einen weiteren nichttrivialen Unterraum von V an! Finden Sie für den Vektorraum V und für die Unterräume jeweils Basen und bestimmen Sie die Dimension!

3. Handelt es sich bei $L((3, 2, 9, -1), (0, 3, 3, 2), (1, -1, 1))$ um einen Unterraum des \mathbb{R}^4 ?

4. Ist $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - z = 1\}$ ein Unterraum des \mathbb{R}^3 ?

5. Bestimmen Sie eine Basis von $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - z = 0\}$ und $\dim(U)$.

6. Bestimmen Sie eine Basis von $U = L((1, -1, 1), (1, 2, 4), (0, 3, 3))$ und $\dim(U)$.

7. $U_1 = L((1, 0, 1), (1, 2, -1), (0, 2, -2))$ und $U_2 = L((0, -1, 1), (2, 2, 0), (1, 4, -3))$ sind Unterräume des \mathbb{R}^3 . Gilt $U_1 = U_2$?

8. $U_1 = L((1, 0, 1), (1, 2, -1), (0, 2, -2))$ und $U_2 = L((0, -1, 1), (2, 2, 0), (1, 4, -2))$ sind Unterräume des \mathbb{R}^3 . Gilt $U_1 = U_2$?

9. Seien $U_1 = L((1, 0, 1), (0, 2, -2))$ und $U_2 = L((2, 2, 0), (1, 4, -2))$ sind Unterräume des \mathbb{R}^3 . Ist die Summe der beiden UR direkt?

10. Finden Sie zu $U_1 = L((1, 0, 1), (1, 2, -1), (0, 2, -2))$ einen Raum W , sodass gilt: $U_1 \oplus W = \mathbb{R}^3$.