

# Übungsblatt 8

Besprechung am **01.06.2007**.

---

**Aufgabe 1** Berechnen Sie näherungsweise  $\int_0^1 \sin(x^2) dx$ , indem Sie das Taylorpolynom vom Grad 14 einsetzen. Kann man dieses Integral auch exakt ausrechnen?

**Aufgabe 2** Bestimmen Sie allgemein den  $n$ -ten Koeffizienten  $f_n$  der Taylorreihe  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$  für folgende Funktionen  $f$ :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad f(x) = \log(x+1), \quad f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad f(x) = \arctan(x).$$

*Beispiel:* Für  $f(x) = e^x$  ist  $f_n = 1/n!$ .

**Aufgabe 3** Berechnen Sie folgende Grenzwerte mittels Taylorentwicklung:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - x^2}{2 \cos x - 2 + x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{\sin^2 x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (\log(1 - 2x))^2}{1 - \cos(x^2)}.$$

**Aufgabe 4** Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass  $f$  stetig ist, und bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung in  $x = 0$ . Argumentieren Sie, dass man auch die Ableitung  $n$ -ter Ordnung berechnen kann. Berechnen Sie die Taylorreihe um den Nullpunkt und vergleichen Sie diese mit der Funktion selbst.

**Aufgabe 5** Schreiben Sie eine Funktion in Maxima, die ein gegebenes Polynom

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

für vorgegebenes  $c$  in die Form

$$b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + \dots + b_n(x-c)^n$$

umwandelt.

*Das Programm schicken Sie bitte bis zum 31.05.2007 per eMail an Ihre(n) ÜbungsleiterIn.*

**Aufgabe 6** Die Funktion  $y$ , die durch die folgende Gleichung gegeben ist, beschreibt die Intensitätsverteilung des Lichts in einem Regenbogen:

$$y''(x) = x \cdot y(x) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Angenommen diese Funktion besitzt eine Taylorreihe

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Gleichung die Taylorpolynome 6-ten und 12-ten Grades. Zeichnen Sie diese mit Maxima.

*Die Lösung zu dieser Aufgabe können Sie schriftlich ausarbeiten und in der nächsten Übungsstunde zur Bewertung abgeben.*