Übungsblatt 5

Besprechung am **27.04.2007.**

Aufgabe 1 Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $\sin(\frac{x^2-1}{x^2+1})$

b) $\arctan(\frac{e^x-1}{e^x+1})$

c) $\exp(\exp(\exp(\exp(x))))$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

e) $\log_x(x^2+1)$

f) $x^2 e^{\cos(x^2+1)}$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extremwerte (Minima und Maxima) der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{|x^2-4| + x - x^2}{x^2+1}$$

Aufgabe 3 Konstruieren Sie eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in $x = 1$ und $x = 5$ eine Nullstelle, in $x = 3$ ein lokales Maximum, in $x = 7$ ein lokales Minimum hat, und für die gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Aufgabe 4 Die Funktion $W\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist implizit durch die Gleichung

$$W(x)\exp(W(x)) = x \qquad (x > 0)$$

definiert (Lambertsche W-Funktion). Zeigen Sie, daß W auf $(0,\infty)$ differenzierbar ist, und daß gilt

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))} \qquad (x > 0).$$

Aufgabe 5 Betrachten Sie Ausdrücke, die aus den rationalen Zahlen, der Variablen x den Operationen $+, \cdot, -, /$ und den einstelligen Funktionssymbolen $e(\cdot)$ und $l(\cdot)$ aufgebaut sind. Schreiben Sie eine Maxima-Prozedur, die aus solch einem Ausdruck einen Ausdruck für seine Ableitung berechnet, wobei $e(x)$ und $l(x)$ als e^x bzw. $\log x$ interpretiert werden soll.

Vergleichen Sie die Ausgaben Ihres Programms mit denen der eingebauten Funktion `diff`.

Hinweis: Mit `op(`⟨expr⟩`)` können Sie auf das äußerste Funktionssymbol eines Ausdrucks zugreifen, und mit `part(`⟨expr⟩`,` i`)` erhalten Sie den i-ten Operanden.

Ihre Lösung zu dieser Aufgabe schicken Sie bitte bis zum 26.04.2007 per E-Mail an Ihren Übungsleiter.

Aufgabe 6 Seien $f, g\colon \mathbb{R} \setminus \{2, \frac{1}{3}\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \arctan \tfrac{1+2x}{2-x} \quad \text{und} \quad g(x) = \arctan \tfrac{3+x}{1-3x}.$$

Zeigen Sie, daß es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $f(x) = g(x) + c$ für alle x.

Hinweis: Betrachten Sie f' und g'.

Die Lösung zu dieser Aufgabe können Sie schriftlich ausarbeiten und Ihrem Übungsleiter zur Bewertung vorlegen. (Auf den verbleibenden acht Übungsblättern wird je eine solche Aufgabe zu finden sein. Vier davon sollten Sie abgeben.)