

Name:

Matr.Nr.:

Stud.Kennz.:

Klausur
“Lineare Algebra und Analytische Geometrie II” (326001)
 28.6.2007

Bitte folgendes beachten:

- Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.
 - Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen – auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.
 - Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.
 - Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.
-

- (1) Sei V ein Vektorraum über K (K ist \mathbb{R} oder \mathbb{C}). Beschreiben Sie:
- (a) Welche Eigenschaften muss eine Abbildung $\langle \cdot | \cdot \rangle : V^2 \rightarrow K$ haben, damit wir sie ein inneres Produkt auf V nennen?
 - (b) Wie erhalten wir aus einem inneren Produkt eine Norm?
 - (c) Wie lauten die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und die Dreiecksungleichung?
- (2) Sei $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ein inneres Produkt auf dem Vektorraum V , und sei $\|\cdot\|$ die von $\langle \cdot | \cdot \rangle$ induzierte Norm. Beweisen Sie: Für alle $x, y \in V$ gilt: $|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.
- (3) Sei V der Vektorraum der $n \times n$ Matrizen über \mathbb{R} . Seien

$$\langle A | B \rangle_1 = \text{spur}(B^T A) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}, \quad \langle A | B \rangle_2 = \text{spur}(AB) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ji}.$$

- (a) Ist $\langle A | B \rangle_1$ ein Skalarprodukt auf V ?
 - (b) Ist $\langle A | B \rangle_2$ ein Skalarprodukt auf V ?
- Begründen Sie Ihre Antwort.

- (4) Bestimmen Sie eine maximale Menge linear unabhängiger Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (5) (a) Was versteht man unter dem Minimalpolynom einer quadratischen Matrix A über dem Körper K ?
(b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (6) Bestimmen Sie mithilfe des Gram-Schmidt Orthonormalisierungsprozesses eine orthonormale Basis des von den beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Teilraumes von $V = \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt $\langle A|B \rangle_1$ aus Aufgabe (3).

- (7) Welche Normalformen von Matrizen kennen Sie, und wie hängen diese zusammen?