Name: ....

Matr.Nr.: ....

Stud.Kennz.: ....

Klausur
"Lineare Algebra und Analytische Geometrie II" (326001)
28.6.2007

Bitte folgendes beachten:

- *Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.*
- *Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.*
- *Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.*
- *Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.*

---

(1) Sei A eine $n \times n$ Matrix über dem Körper K. Beschreiben Sie:
 (a) Was ist ein Eigenwert bzw. ein Eigenvektor von A?
 (b) Was ist die algebraische bzw. die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes von A?
 (c) Wie hängen n, die Anzahl der Eigenwerte, die algebraische und die geometrische Vielfachheit zusammen?

(2) Sei A eine $n \times n$ Matrix über dem Körper K. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ verschiedene Eigenwerte von A, und sei jeweils x_i ein Eigenvektor zu λ_i, $1 \leq i \leq k$.
Beweisen Sie: *Die Vektoren $x_1, \dots, x_k$ sind linear unabhängig.*

(3) Bestimmen Sie eine maximale Menge linear unabhängiger Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(4) (a) Was versteht man unter dem Minimalpolynom einer quadratischen Matrix A über dem Körper K?
(b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(5) Seien $a, b \in R$, $a < b$, und sei $V = C([a,b], \mathbb{R})$ der reelle Vektorraum der stetigen Funktionen von $[a,b]$ in $\mathbb{R}$. Seien

$$\langle f|g\rangle_1 = \int_a^b fg, \qquad \langle f|g\rangle_2 = \int_a^b f^2 g.$$

(a) Ist $\langle f|g\rangle_1$ ein Skalarprodukt auf V?
(b) Ist $\langle f|g\rangle_2$ ein Skalarprodukt auf V?
Begründen Sie Ihre Antwort.

(6) Bestimmen Sie mithilfe des Gram-Schmidt Orthonormalisierungsprozesses eine orthonormale Basis des von den beiden Funktionen

$$f_1(x) = x + 1, \quad f_2(x) = x^2 + x + 1$$

aufgespannten Teilraumes von $V = C([0,1], \mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt $\langle f|g\rangle_1$ aus Aufgabe (5).

(7) Welche Normalformen von Matrizen kennen Sie, und wie hängen diese zusammen?