

Übungsklausur

30.06.2006

Gruppe B

Beschriften Sie jedes Blatt, das bewertet werden soll, mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**. Verwenden Sie für verschiedene Aufgaben verschiedene Blätter. Formulieren Sie Ihre Lösungen klar und nachvollziehbar. Als Hilfsmittel sind numerische Taschenrechner sowie sämtliche nicht-elektronischen Materialien zugelassen. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Viel Erfolg!

- Aufgabe 1** a) Ermitteln Sie für die folgende komplexe Zahl $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$, und den Winkel zwischen ihrem Ortsvektor und der positiven reellen Achse in der komplexen Zahlenebene: **5 P.**

$$z = \frac{4}{\sqrt{3} - i}.$$

- b) Ist die Hintereinanderausführung von zwei surjektiven Funktionen immer surjektiv? Begründen Sie Ihre Antwort. **5 P.**

Lösung

- a) $\operatorname{Re}(z) = \sqrt{3}$, $\operatorname{Im}(z) = 1$, $|z| = 2$, $\arg(z) = \pi/6$
- b) Seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ surjektiv und $z \in Z$. Dann existiert wegen Surjektivität von g ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Ferner existiert wegen der Surjektivität von f ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Somit gilt $g(f(x)) = z$, und da z beliebig war, folgt die Surjektivität von $g \circ f$.
- Bemerkung:* Wenn man allgemeiner Funktionen $f: A \rightarrow B$ und $g: C \rightarrow D$ betrachtet (mit $B \subseteq C$), dann läßt sich im Fall $B \subsetneq C$ ein Gegenbeispiel konstruieren. Das wurde auch als richtige Lösung anerkannt.

Aufgabe 2 Grenzwert-Berechnungen

- a) Berechnen Sie die (eigentlichen und uneigentlichen) Grenzwerte: **4 P.**

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2}{n}, \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 - n^2}{n+3}$$

- b) Konvergiert die folgende Reihe? Begründen Sie Ihre Antwort. **3 P.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3^n}$$

- c) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert. Begründen Sie die Schritte. **3 P.**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{x-3}{(x-1)(x+1)} \right)$$

Lösung

- a) (i) Umformen für $n > 0$:

$$\frac{n^2 + 2}{n} = n + \frac{2}{n}$$

Dann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n + \frac{2}{n} = \infty$$

- (ii) Umformen für $n > 0$:

$$\frac{(n+2)^2 - n^2}{n+3} = \frac{4n+4}{n+3} = \frac{n(4 + \frac{4}{n})}{n(1 + \frac{3}{n})} = \frac{4 + \frac{4}{n}}{1 + \frac{3}{n}}$$

Dann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{4}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = \frac{4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n}}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n}} = \frac{4 + 0}{1 + 0} = 4$$

- b) Wegen $2n + 3^n \geq 3^n$ für alle $n \geq 0$ gilt $\frac{1}{2n+3^n} \leq (\frac{1}{3})^n$. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^n$ konvergiert weil $\frac{1}{3} < 1$. Also konvergiert die ursprüngliche Reihe auf Grund des Majorantenkriteriums.
- c) Zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} + \frac{x-3}{(x-1)(x+1)} &= \frac{(x+1) + (x-3)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{2}{(x+1)} \end{aligned}$$

Diese Funktion ist stetig und mit der ursprünglichen identisch für $x \neq 1$, man erhält also den Grenzwert durch einsetzen: Grenzwert ist 1.

Aufgabe 3 Sei $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \exp(\sqrt{x})$.

- a) Berechnen Sie die erste Ableitung von $f(x)$. **3 P.**
- b) Berechnen Sie eine Näherung an $\exp(\sqrt{1/2}) = 2.0281\dots$, indem Sie die Funktion f bei $x = 1$ durch ihre lineare Approximation ersetzen. Wie genau ist Ihr Resultat? **4 P.**
Hinweis: $e = \exp(1) = 2.7182\dots$
- c) Können Sie dazu auch die lineare Approximation von f für $x = 0$ verwenden? Begründen Sie Ihre Antwort. **3 P.**

Lösung

- a) $f'(x) = \exp(\sqrt{x})/2\sqrt{x}$
- b) $a(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = e + (x-1)e/2 = \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}ex$ Für $x = 1/2$ ergibt sich $a(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}e = 2.0387\dots$ Der Fehler ist also etwa 0.01.
- c) Das ist nicht möglich, weil f in $x = 0$ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 4 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > b > 0$ gegeben. Es geht um die Ellipse

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \right\},$$

die von der Kurve

$$\Gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \mathbf{x}(t) := \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} b \sin t \\ a \cos t \end{bmatrix}$$

umlaufen wird.

- a) Nach Gauß und Green hat die Fläche der von Γ eingeschlossenen Kurve den Flächeninhalt **3 P.**

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt.$$

Leiten Sie daraus die Flächenformel für die Ellipse in Abhängigkeit von a und b her.

- b) Durch Rotation der Ellipse um die x -Achse entsteht ein sogenanntes Rotationsellipsoid. **3 P.**
Berechnen Sie dessen Volumen V in Abhängigkeit von a und b .

Hinweis: Es ist hier zweckmäßig, von der impliziten Darstellung E statt von Γ auszugehen.

- c) Die Berechnung des Ellipsenumfangs mit der bekannten Formel für die Bogenlänge führt auf ein Integral, das sich nicht in geschlossener Form auswerten läßt. Wie lautet dieses Integral? **4 P.**
Leiten Sie aus dem Integral eine Näherungsformel für den Umfang U her, indem Sie den Integrationsbereich $[0, 2\pi]$ in $[0, \pi]$ und $[\pi, 2\pi]$ aufteilen und auf jedes dieser Teilintegrale die Simpsonregel anwenden.

Lösung

- a)

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (b \sin(t)(-a \sin(t)) - a \cos(t)b \cos(t)) dt = -\frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = -\frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} 1 dt \\ &= -\frac{1}{2} ab [t]_0^{2\pi} = -ab\pi \end{aligned}$$

- b) Aus der impliziten Darstellung erhält man $y = \pm a\sqrt{1 - x^2/b^2}$. Damit:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-b}^b \left(a\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}} \right)^2 dx = \pi a^2 \int_{-b}^b \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) dx = \pi a^2 \left[x - \frac{x^3}{3b^2} \right]_{-b}^b \\ &= \pi a^2 \left(b - \frac{b^3}{3b^2} - (-b) + \frac{(-b)^3}{3b^2} \right) = \pi a^2 \left(b - \frac{1}{3}b + b - \frac{1}{3}b \right) = \frac{4}{3}\pi ba^2. \end{aligned}$$

- c)

$$U = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \underbrace{\sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}}_{=:g(t)} dt.$$

Teile Integrationsbereich: $U = U_1 + U_2$ mit

$$U_1 := \int_0^{\pi} g(t) dt, \quad U_2 := \int_{\pi}^{2\pi} g(t) dt$$

Nach Simpson gilt nun

$$\begin{aligned} U_1 &\approx \frac{1}{6}\pi(g(0) + 4g(\pi/2) + g(\pi)) = \frac{1}{6}\pi(a + 4b + a) \\ U_2 &\approx \frac{1}{6}\pi(g(\pi) + 4g(3\pi/2) + g(2\pi)) = \frac{1}{6}\pi(a + 4b + a), \end{aligned}$$

also

$$U = U_1 + U_2 \approx \frac{2}{3}\pi(2b + a).$$