Übungsblatt 12

Besprechung am **23.06.2006.**

Aufgabe 1 Berechnen Sie den Gradienten der Funktionen

$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right) \text{ und } g(x,y) = \log\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right)$ für $t > 0$ and $x \in \mathbb{R}$ die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $w(x,t) = g(x-kt)$ (falls g differenzierbar ist) die *Transportgleichung*

$$\frac{\partial w}{\partial t} + k\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

erfüllt.

Aufgabe 3 Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = x^4 - 3x^2y + y^3$$

auf lokale Extremwerte und Sattelpunkte. Visualisieren Sie den Graphen der Funktion.
(*Hinweis:* Um das Verhalten der funktion bei $(0,0)$ zu untersuchen, betrachten Sie die partiellen Abbildungen $f(x,0)$ und $f(0,y)$.)

Aufgabe 4 Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen und skizzieren Sie einige Lösungskurven:

$$(a)\ \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{x}{t}, \qquad (b)\ \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{t}{x}, \qquad (c)\ \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{-t}{x}$$

(*Hinweis:* Das Richtungsfeld skizzieren Sie am besten mit `maple`, z.B. mit `dfieldplot`.)

Aufgabe 5 Implementieren Sie das explizite Eulerverfahren zur Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(a) = y_0$$

auf dem Intervall $[a,b]$. D.h. schreiben Sie ein Programm, das als Eingabe eine Funktion $f(x,y)$, ein Intervall $[a,b]$, eine Schrittweite N und einen Anfangswert y_0 erwartet. Für $h := (b-a)/N$

soll das Programm eine Lösung an den Stützstellen $x_j := a + hj$ (für $0 \leq j \leq N$) durch Werte $y_j \approx y(x_j)$ approximieren. Dazu wird die Rekursionsformel

$$y_{j+1} := y_j + hf(x_j, y_j)$$

verwendet.

Visualisieren Sie Näherungslösungen für die Gleichung $y'(x) = -\frac{2xy(x)}{x^2+2y(x)}$ mit Startwerten $y_0 \in \{1, 0.5, 0.1, -0.1\}$ und interpretieren Sie das Ergebnis ($\rightarrow$ Richtungsfeld!).

Ihre Lösung zu dieser Aufgabe schicken Sie bitte bis zum 22.06.2006 per eMail an Ihren Übungsleiter.