

```

> restart:
> with(OreModules):
> with(linalg):
> A:=DefineOreAlgebra(diff=[dt,t],diff=[d1,x1],diff=[d2,x2],diff=[d3,x3],polynom=[x1,x2,x3,t]):
> R:=evalm([ [dt,0,0,0,-d3,d2], [0,dt,0,d3,0,-d1], [0,0,dt,-d2,d1,0], [d1,d2,d3,0,0,0] ]);

```

$$R := \begin{bmatrix} dt & 0 & 0 & 0 & -d3 & d2 \\ 0 & dt & 0 & d3 & 0 & -d1 \\ 0 & 0 & dt & -d2 & d1 & 0 \\ d1 & d2 & d3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

```

> SyzygyModule(R,A);

```

$$\begin{bmatrix} -d1 & -d2 & -d3 & dt \end{bmatrix} \quad (2)$$

```

> FreeResolution(R,A);

```

$$table \left( \left[ \begin{matrix} 1 = \begin{bmatrix} dt & 0 & 0 & 0 & -d3 & d2 \\ 0 & dt & 0 & d3 & 0 & -d1 \\ 0 & 0 & dt & -d2 & d1 & 0 \\ d1 & d2 & d3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 2 = \begin{bmatrix} -d1 & -d2 & -d3 & dt \end{bmatrix}, 3 = INJ(1) \end{matrix} \right] \right) \quad (3)$$

```

> OreRank(R,A);

```

$$3 \quad (4)$$

```

> R_adj:=Involution(R,A);

```

$$R\_adj := \begin{bmatrix} -dt & 0 & 0 & -d1 \\ 0 & -dt & 0 & -d2 \\ 0 & 0 & -dt & -d3 \\ 0 & -d3 & d2 & 0 \\ d3 & 0 & -d1 & 0 \\ -d2 & d1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

```

> Ext1:=Exti(R_adj,A,1);

```

$$Ext1 := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d1 & d2 & d3 & 0 & 0 & 0 \\ dt & 0 & 0 & 0 & -d3 & d2 \\ 0 & dt & 0 & d3 & 0 & -d1 \\ 0 & 0 & dt & -d2 & d1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d2 & -d3 & 0 & 0 \\ -d1 & 0 & d3 & 0 \\ 0 & d1 & -d2 & 0 \\ 0 & 0 & -dt & -d1 \\ 0 & -dt & 0 & -d2 \\ -dt & 0 & 0 & -d3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (6)$$

```

> Ext2:=Exti(R_adj,A,2);

```

$$Ext2 := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d2 & -d3 & 0 & 0 \\ d1 & 0 & -d3 & 0 \\ dt & 0 & 0 & d3 \\ 0 & d1 & -d2 & 0 \\ 0 & dt & 0 & d2 \\ 0 & 0 & dt & d1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d3 \\ d2 \\ d1 \\ -dt \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (7)$$

> **Ext3:=Exti(R\_adj,A,3);**

$$Ext3 := \begin{bmatrix} d3 \\ d2 \\ d1 \\ dt \end{bmatrix}, [1], SURJ(1) \quad (8)$$

> **P:=Ext1[3];**

$$P := \begin{bmatrix} d2 & -d3 & 0 & 0 \\ -d1 & 0 & d3 & 0 \\ 0 & d1 & -d2 & 0 \\ 0 & 0 & -dt & -d1 \\ 0 & -dt & 0 & -d2 \\ -dt & 0 & 0 & -d3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

> **coldim(P);**

$$4 \quad (10)$$

> **Min:=MinimalParametrizations(R,A);**

$$Min := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} d2 & -d3 & 0 \\ -d1 & 0 & d3 \\ 0 & d1 & -d2 \\ 0 & 0 & -dt \\ 0 & -dt & 0 \\ -dt & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d2 & -d3 & 0 \\ -d1 & 0 & 0 \\ 0 & d1 & 0 \\ 0 & 0 & -d1 \\ 0 & -dt & -d2 \\ -dt & 0 & -d3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d2 & 0 & 0 \\ -d1 & d3 & 0 \\ 0 & -d2 & 0 \\ 0 & -dt & -d1 \\ 0 & 0 & -d2 \\ -dt & 0 & -d3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -d3 & 0 & 0 \\ 0 & d3 & 0 \\ d1 & -d2 & 0 \\ 0 & -dt & -d1 \\ -dt & 0 & -d2 \\ 0 & 0 & -d3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (11)$$

> **map(a->LeftInverse(a,A),Min);**

$$[[ ], [ ], [ ], [ ]] \quad (12)$$

>

> **map(a->SyzygyModule(a,A),Min);**

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} d1 & d2 & d3 & 0 & 0 & 0 \\ dt & 0 & 0 & 0 & -d3 & d2 \\ 0 & dt & 0 & d3 & 0 & -d1 \\ 0 & 0 & dt & -d2 & d1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d1 & d2 & d3 & 0 & 0 & 0 \\ dt & 0 & 0 & 0 & -d3 & d2 \\ 0 & dt & 0 & d3 & 0 & -d1 \\ 0 & 0 & dt & -d2 & d1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d1 & d2 & d3 & 0 & 0 & 0 \\ dt & 0 & 0 & 0 & -d3 & d2 \\ 0 & dt & 0 & d3 & 0 & -d1 \\ 0 & 0 & dt & -d2 & d1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (13)$$

[>

$$\begin{bmatrix} d1 & d2 & d3 & 0 & 0 & 0 \\ dt & 0 & 0 & 0 & -d3 & d2 \\ 0 & dt & 0 & d3 & 0 & -d1 \\ 0 & 0 & dt & -d2 & d1 & 0 \end{bmatrix}$$